**Л 11. Неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования.**

**Цель лекции:** Цель лекции заключается в том, чтобы познакомить студентов с понятием первообразной и неопределённого интеграла, изучить их основные свойства, рассмотреть таблицу наиболее часто используемых неопределённых интегралов и освоить базовые методы интегрирования, включая замену переменной, подведение под знак дифференциала и интегрирование по частям, а также научиться применять эти методы для вычисления неопределённых интегралов.

**Основные вопросы**

- Понятие первообразной.
- Определение неопределённого интеграла.
- Свойства неопределённых интегралов.
- Таблица основных интегралов.
- Проверка правильности интегрирования через производную.
- Метод замены переменной в неопределённом интеграле.
- Метод подведения под знак дифференциала.
- Метод интегрирования по частям.

**Краткое содержание:** лекция начинается с введения первообразной и неопределённого интеграла как множества всех первообразных функции. Рассматриваются базовые свойства неопределённых интегралов (линейность, вынесение константы, интеграл суммы и др.). Далее приводится обширная таблица основных интегралов, необходимых для практических вычислений. Затем изучаются ключевые методы интегрирования: замена переменной (включая теорему о корректности замены), подведение под знак дифференциала и метод интегрирования по частям. Приводятся примеры применения каждого метода.

**Определение.** Первообразной для функции $y = f(x)$, определенной в интервале $(a,b)$, называется такая функция $y = F(x)$, производная которой совпадает с $f(x)$ в интервале $(a,b)$, т.е.

$$F'(x) \equiv f(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Другими словами, нахождение первообразной для данной функции есть задача обратная к задаче нахождения ее производной.

**Пример.** Первообразной для функции $y = x^2$, на $(-\infty,+\infty)$ является функция $y = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Заметим, что это не единственная первообразная у данной функции. Функции $y = \frac{x^3}{3} + 1$, $y = \frac{x^3}{3} + 2$, а также любая функция $y = \frac{x^3}{3} + C$ ($C$-число), являются первообразными для функции $y = x^2$.

**Теорема 1.** Если $x_0 = a$ и $x_n = b$ две первообразные для функции $y = f(x)$ на $(a,b)$, то найдется такое число $C$, что $F_1(x) \equiv F_2(x) + C$.

**Определение.** Множество всех первообразных для функции $y = f(x)$ на интервале $(a,b)$ называется неопределенным интегралом этой функции.

Он обозначается символами $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, $dx$ - дифференциал переменной $x$. Если $y = F(x)$ какая либо первообразная функции $y = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad C \in R$$

В дальнейшем для краткости мы не будем упоминать интервал $(a,b)$ определения первообразной.

Неопределенные интегралы являются основным инструментом для нахождения определенных интегралов, имеющих широкие применения практически во всех приложениях математики. В этой главе мы рассмотрим методы нахождения различных неопределенных интегралов. Сразу следует заметить, что в отличие от производных, нет алгоритма нахождения любого неопределенного интеграла, а некоторые интегралы вообще нельзя выразить с помощью элементарных функций.

**Свойства неопределенных интегралов**

Мы будем предполагать, что все записанные интегралы существуют.

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $\quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$; $\int df(x) = f(x) + C$.

Эти свойства непосредственно следуют из определения неопределенного интеграла.

3) Если $a$ - число, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Для доказательства этих утверждений продифференцируйте левую и правую части каждого равенства.

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\quad a, b$ - числа, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Для практического интегрирования прежде всего необходимо знать наизусть следующую таблицу.

**Таблица основных неопределенных интегралов**

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{a+1} + C \quad (n \neq -1)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

В частности, $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a > 0)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0)$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

8. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$.

9. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

16. $\int shxdx = chx + C$.

17. $\int chxdx = shx + C$.

18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Проверка любого интеграла из этой таблицы состоит в нахождении производной правой части.

**Например.** $\int \cos x dx = \sin x + C$, т.к. $(\sin x)' = \cos x$

**Пример.** $\int \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$.

**1. Замена переменной в неопределенном интеграле**

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна, а функция $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема, то $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$.

Это равенство можно также записать в виде интеграла $\int f(x)dx = \int f(x(t))dx(t)$

**Пример.** Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$, с помощью замены переменной $2x+1 = t^2$, т.е. $x = \frac{t^2-1}{2}$. При этом используется следующая запись

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \left| x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = \left(\frac{t^2-1}{2}\right)' dt = tdt \right| = \int \frac{tdt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t - \ln|t+1| + C = \left|t = \sqrt{2x+1}\right| = \sqrt{2x+1} - \ln\left|\sqrt{2x+1}\right| + C$$

После интегрирования необходимо вернуться к исходной переменной $x$.

**2. Метод подведения под знак дифференциала.** Этот метод является наиболее часто используемым видом замены переменной, при котором один из сомножителей подынтегральной функции заносится под знак $d$ и объявляется новой переменной. Напомним, что подвести функцию $u'(x)$ под знак дифференциала $dx$- это значит записать после знака $d$ первообразную функции, т.е.

$$u'(x)dx = du(x).$$

**Следствие.** Пусть функции $y = f(u)$ и $y = u'(x)$ непрерывны, тогда

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Эта формула фактически повторяет формулу (1), переписанную справа налево и в других обозначениях.

**Пример.**

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left|x^2+1=u\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

**3. Метод интегрирования по частям**

**Теорема.** Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Последнюю формулу часто записывают в сокращенном виде

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где сомножители $v'$ и $u'$ внесены под знаки дифференциала.

**Пример.**

$$\int arctgxdx = \left| \begin{array}{l} arctgx = u, v = x, \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \end{array} \right| = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(см. предыдущий пример).

**Пример.**

$$\int x\cos xdx = \int xd\sin x = \left|u = x, du = dx, v = \sin x\right| = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

**Вопросы для самоконтроля**

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Запишите основные свойства неопределённых интегралов.
4. Как проверить правильность найденного интеграла?
5. Приведите несколько основных интегралов из таблицы.
6. В чём состоит метод замены переменной в неопределённом интеграле?
7. Как сформулировать метод подведения под знак дифференциала?
8. Сформулируйте формулу интегрирования по частям.
9. В каких случаях удобно применять интегрирование по частям?
10. Почему для некоторых функций невозможно выразить первообразную в элементарных функциях?

**Литература**


1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике.
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа.
4. Демидович. Сборник задач по математическому анализу.